特別寄稿

弾塑性土質力学とは何か？

名古屋大学名誉教授　浅岡　顕

1 はじめに

1.1.　報文の構成

土の力学的な特性の弾塑性力学による記述と，それを踏まえた地盤の変形破壊の計算は，まとめて地盤力学と呼ばれている。著者はこのうちの「土の力学特性の弾塑性力学による記述」は，今でも「土質力学」の言葉で構わないように思っている。

第1章では，この土質力学について何を述べようとしたいのか，その動機を書いて，報文の入り口にする。これまでの教科書にある土質力学の常識はしばらく忘れて，素直に土の体積変化が不思議だと思っていただければ，ほとんどそれで十分である。弾塑性土質力学の中身は第2章と第3章で紹介する。

第4章では自然堆積粘土地盤の長期にわたる遅れ大沈下の話題を取り上げ，土の体積変化に関する弾塑性土質力学の応用の一端を示した。

第5章はそのまとめであるが，関連する日本の土質力学小史にも触れた。

1.2.　土の体積変化，その1

金属の比重が，鉄なら7.85と一定で，薄く圧延しても，あるいは針金のように長く引き伸ばしてもこの値は変わらない。これは金属の塑性変形に体積変化は伴わないからだが，もっといえば，金属だけでなく鉱石やガラスから水に至るまで，ほとんどの物質は，弾性圧縮や熱による変化は措いて，土木・建築で出てくる力くらいでは，体積変化は起こらない。土だけが自在に体積変化する。これはどういうことか？

土は粘土でも砂でも土粒子が骨格を作っていて（土骨格）その隙間を水が埋めている（飽和土）。土粒子も間隙水も体積変化しないが，土骨格全体は外力を受けて，間隙水を排出しながら間隙比eが減少して土骨格の体積（1＋e）は圧縮するし，間隙水を吸い込みながら間隙比eが増大して土骨格の体積（1＋e）は膨張もする。つまり我々が勝手に土骨格，とその間隙を埋める水とを合わせて，それだけを「土」と定義しているから，土は圧縮したり膨張したりするのである。1＋eは土の比体積（土粒子の体積を1とした時の土骨格の体積のことで，これは比重と同じ言い方）と言い，v（＝1＋e）と書く。

排出した水や流入する水も含めて初めから全部を土と呼んでおけば，他の材料と同じく土も体積変化は起こらなくて周りの力学と整合する。しかしそれをしないのだから，土骨格の体積は原理的には土骨格を水切りネットの網かサランラップかでくるんで計量する。土粒子の体積の総和などではない。これは土骨格の断面積も同じ。排出した水や，これから吸い込む水を土とは呼ばないことは重要で，だから土は変形に応じて軽くなったり重くなったりしている。大げさに言えば土質力学に質量保存の法則はあてはまらないのであって，このことを知っていないと正確な一次元圧密の計算さえもができなくなる。

以下では断らない限り，飽和土に限って話を進める。

1.3.　全応力，間隙水圧，有効応力

飽和土は土骨格の体積変化が非圧縮の間隙水で拘束ないし束縛されている材料であり，土骨格を体積変化しないように束縛する力の反力は非圧縮の水がとり，間隙水圧となって現れる。土骨格がせん断変形を受けてその時圧縮もしたいのに，間隙水が圧縮してはダメと土骨格を膨らませようとすると（非排水せん断のことを言っている），土骨格は水を圧縮することになるが（作用反作用の法則）間隙水圧を測るとその大きさがわかる。このとき，土骨格の力の釣り合いを満たす応力σ（全応力）は，この間隙水圧uと全応力から間隙水圧を引き去った有効応力σ'の二つに分けて取り扱われる。そしてこの有効応力が土骨格の力学挙動を支配する（Terzaghiの有効応力原理）。土の変形から破壊までは二相混合体の連続体力学で計算されるが，上の有効応力は混合体の固相の分圧ではないので注意する。つまり，

$$\sigma = \sigma' + u \tag{1.1}$$

なのであって，一次元問題で言えば土骨格の断面積をAとして，

$$\sigma A = \sigma' A + uA \tag{1.2}$$

式（1.1）の両辺にAが共通に掛かって「力」が計算される。鉄筋コンクリートのように

$$\sigma A = \sigma_s A_s + \sigma_c A_c \tag{1.3}$$

ではない。ここに$A=A_S$（鉄筋の断面積）＋A_C（コンクリートの断面積）。

土骨格の変形（せん断変形と体積変化）は有効応力が変化したときにのみ生じるというのが有効応力原理で，Terzaghiが粘土の一次元圧密現象の観察から発見した（とされる）。

有効応力原理の詳細に触れることはしないが，土の重さ／密度を考えると理解が進むかもしれない。飽和土の密度（単位体積重量）γを，土質力学では

$$\gamma = \gamma' + \gamma_w \tag{1.4}$$

ここにγ_wは水の密度，と書くのが普通で，土の重さは土骨格の体積Vを式（1.4）の両辺に共通して掛けて求められる。これは式（1.2）と同じ。式（1.4）を鉄筋コンクリート式（1.3）のように

$$\gamma V = \gamma_s V_s + \gamma_c V_c \tag{1.5}$$

と書いたりすることはしないことが重要である。ここに$V=V_S$（鉄筋の体積）＋V_C（コンクリートの体積）。

式（1.1）と式（1.4）は混合体力学の要諦だと思うが，一次元問題を考えればわかるように，γ'に高さをかけてその位置での鉛直有効応力が出る

し，γ_wに高さをかけてその深さでの間隙水圧が出る。土骨格の圧縮や膨張の量は土質力学では間隙比eの変化，あるいは比堆積vの変化で記述するが，間隙比eとγ'の対応は次式の通り。γ_wは変化しない。

$$\gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + \mathrm{e}} \tag{1.6}$$

ここにG_sは土粒子の比重。

式(1.1)では以下が重要である。側圧一定の三軸試験を念頭に置いて，せん断応力qは

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1' - \sigma_3' \tag{1.7}$$

で定義するが，せん断応力に全応力，有効応力の区別はなくてq'などはない。しかし平均応力pと平均有効応力p'とは，間隙水圧の分だけ異なる。再び側圧一定の三軸試験($\sigma_2=\sigma_3$)を念頭においてこれを書けば，

$$p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1' + 2\sigma_3'}{3} + u = p' + u \tag{1.8}$$

となっていて，pとp'の区別は重要である。

1.4.　土の体積変化，その2

土骨格の体積変化は間隙水が移動して，つまり間隙比eが変化して，はじめて起こる。土の変形を土骨格の変形と考え，全応力ではなく有効応力の変化で記述するため，このとき間隙水圧uの分だけ未知数が一つ増えている。だからそれを補うために余分に式が一つ必要になる。間隙比eの変化は必ず間隙からの間隙水の移動をともなうが，それはダルシー則に従う。ダルシー則が一つ増えた未知数を補う余分の式になる。この詳細は数学の話題となり，その説明は本報文の視野の外に置くことにする。末尾の第5章を参照。

1.5.　土の締固めと圧密

ここから少し話題が飛躍するが，この先も土骨格の体積変化(ここでは圧縮)の話を続ける。2.3で述べる土質力学の中心部分の概略である。

茶筒に気乾状態で上からぱらぱらと砂粒を振り入れ，緩い乾燥砂を堆積させる(間隙水がなく間隙水圧がゼロ)。この砂層を圧縮させるとき，上から板などおいて力をかける人はいない。そんなことをしても，砂はいかに緩くてもほとんど圧縮などしない。それよりも茶筒の側面をトントントンと叩く(微小な繰り返しせん断を与える，上で述べたqに微小な擾乱を与える)だけで，砂は容易に大圧縮する。反対側から叩いてもさらに圧縮が進むだけで砂層が膨張することはないから，この体積圧縮は塑性変形である。塑性体積ひずみε_v^pが発生したのである。

繰り返しせん断でひずみが蓄積されるというのは，古典弾塑性力学に反するがそれは第3章に回す。

この圧縮は砂の締固めと言われる。上から砂を締固めようと力をかけていないのだから，土の締固めは平均有効応力p'(＝(σ_1'+σ_2'+σ_3')/3)が増えないのに圧縮が起こるのが特徴である。締固めは土質力学の誕生よりはるか以前からよく知られていたのに，概して難しいと思われたのか，20世紀も最後半まで，世界でだれも締固めを弾塑性力学の言葉で記述することはできなかった。

つぎに今度は，水を張った茶筒に砂粒を振り入れ，飽和した緩い砂に対し同じようにトントントン実験をやってみる。砂といえども間隙から水が染み出るのには数十秒はかかるから，この間土骨格は，圧縮したいのに水が邪魔してできない。数十秒は砂層に体積変化は起こらないでいる。つまり砂の土骨格の体積ひずみε_vはゼロ！ひずみが弾性成分と塑性成分の和で書かれるというのが弾塑性力学だから，

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p \tag{1.9}$$

と書いて，これがトントントン実験の初めの数十秒ではゼロ(＝0)。つまり$\varepsilon_v^e = -\varepsilon_v^p$で，塑性体積ひずみ$\varepsilon_v^p$はプラス(塑性圧縮)であるから，砂層から水が出ない間は砂の土骨格の弾性体積ひずみはマイナスであり，これは弾性膨張。砂の土骨格は，それが膨らむ方向に間隙水によって内から力をかけられていたのである。トントントン実験の間の間隙水圧の上昇はこの膨らませる反力を間隙水がとっていたことの現れである。さて土骨格の弾性膨張には，必ず平均有効応力p'の減少をともなうというのは弾性理論。平均有効応力p'が限りなくゼロに近づくとき，砂は「液状化」に至る。

液状化後の砂の間隙水の排出に伴う圧縮は，液状化後の砂層の沈下として知られていて，これはp'がゼロから元の値にまで戻るときに起こる。つまりp'の増加によって砂は圧密圧縮するが，紛れるとよくないので，ここではこれ以上は述べない。

つぎに，砂ではなく粘土の場合を考える。

茶筒に砂ではなく羊羹のような飽和粘土が入っているとしよう。この粘土を，間隙から水を排出させて土骨格を圧縮させようとするとき，茶筒側面を砂の時のようにトントントンと叩く人などはいない。粘土の上に水だけを通すポーラスストーンを置いて重しを掛け，気長に水が染み出るのを待つ以外にない。重しを置いてもすぐに水は出てこないから，土骨格は圧縮しないで，重しの重さはすべて間隙水圧の上昇になって現れる。間隙水が土骨格を内側から圧縮しないよう押し広げている。しかし時間が十分に経つと水が土から染み出てきて，間隙水圧はやがて元の静水圧に戻り，しかし有効応力が重しの重さ分だけ上昇する。全応力は実験の間いつも同じで変化しないが，その中身の間隙水圧と有効応力への振り分けが刻々変化して，有効応力σ'(正確にはp')が増大して，土骨格の圧縮が進行する。この圧縮が圧密と呼ばれるのは周知のことである。

「粘土からすぐに水が染み出ないのは粘土の透水係数が砂の何万倍も小さいからである」というのは正しい。しかし何万倍も透水係数が大きいはずの緩い砂を圧縮させるのに，ポーラスストーンを介して上に重しを掛ける人などいないことは先ほど述べていた。だから，透水係数の違いだけが砂と粘土の違いを表すのでないことは，すぐに理解される。

「粘土には，砂にはない『粘着力』があって，それで粘土の場合はトントントンでは圧縮しないのだ」という意見があった。

「粘塑性理論」の支持者などの間では，いまでもこれを暗に主張したい人は多いかもしれない。

粘土の弾塑性挙動の記述を目指したカムクレイ(Cam-clay)モデルは，実は「粘土に粘着力などない」ことを議論の出発点に置いて開発されたモデルでもある。粘土の非排水せん断強度を粘着力と呼ぶのは勝手だが，粘土強度を構成する一要素として粘着力を導入する，いわゆる「c–ϕの土質力学」を，初めて全否定したモデルと言ってもよい。もちろんカムクレイモデルは，体積変化とせん断変形の両方を統合して記述する初めての粘土の弾塑性構成式として，世界で高名である。しかし粘着力の件がカムクレイモデルとの関連で強調されることは，なぜか日本においては少なく，著者は残念に思う。

1.6.　土質力学の理論

では，粘土に締固めはないのか?粘土にも締固めはある。読者はすぐには気づくことが少ないと思うので恐縮だが，いわゆる二次圧密がそれにあたる。

二次圧密は粘土の粘塑性挙動などではまったくない。

乾燥砂を念頭に置いてトントントン実験をもう一度考えるが，トントントンを同じ強さで継続するとやがて締固めは完了し，それ以上は締め固まらなくなる。これと同じで，p'の増加がなく進行する土の二次圧密沈下（遅れ沈下）も，やがては止まり，昔の粘塑性理論による説明のように，いつまでも二次圧密が継続することはない。

砂の締固めも粘土の二次圧密も，これらはすべて共通のメカニズムに基づいているから，共通のひとつの弾塑性力学によって説明可能である。

むしろ順序は逆で，砂の締固めも粘土の二次圧密も共通のメカニズムによることが，ひとつの弾塑性理論で明らかにされた，と言うほうが本当は正しい。

1990年代の半ば，阪神淡路の地震のすぐあとまで，世界でも日本でも，砂（の非排水せん断）専用の構成式と粘土専用の構成式という，二つの構成式からなる土質力学の時代が長く続いた。専用理論の時代であったと言ってもよい。地盤安定は円弧すべり解析で，地盤の変形は弾性圧密解析でというふうに，土質力学が安定問題と変形問題に二極化していた前の時代と，これはよく似ている。

典型的な砂と典型的な粘土であれば，どちらが砂でどちらが粘土かは，理論抜きですぐに分かるから，構成式がふたつあっても，その使い分けに不便することはないとの主張もあるかもしれない。しかしそれは大学の中だけの話で，世の中には砂に近い粘土や粘土に近い砂など，砂と粘土の間には稠密に連続したグラデーションで，無数の中間土が存在するから，砂（のそれも非排水）専用の構成式，粘土専用の構成式では，実際の地盤への応用にはまったく役に立たない。

土に関することならばすべてが繋がっているから，粘土の圧密が説明できて砂の締固めは説明できないというような理論は，理論の名に値しない。同じく締固めが説明できて圧密が説明できないという理論も，このような理論はなかったと思うが，やはり理論の名に値しない。残念なことだがしかし，共通の理論によって砂と粘土の違いが明らかにされ，砂から粘土までの稠密な繋がりが明らかになったのは，阪神淡路の後，近々22，3年のことで，それほど古いことではない。

1.7.　理論としてのカムクレイモデルと，その後の発展

カムクレイモデルは，自然堆積した粘土を，水を加えて完全に練り返して作った正規圧密状態にある人工粘土を対象にして，その負荷時の弾塑性挙動を記述するモデルとして，1960年前後にイギリスで開発された。材料のこのような限定と，負荷時の挙動に限るなどの応用範囲の限定は，モデルが現れた当初から，モデルの開発者やその周辺の人々によって明言されていたのであり，この限定を超えるような応用は，開発者らやその周辺の人々には，ほとんど全く見られなかった。これは見事で見倣うべき点が多い。

上の限定からもわかるように，カムクレイモデルでは，過圧密粘土の負荷挙動を説明できない。自然堆積粘土にみられる二次圧密や緩い砂の締固め挙動も説明できない。砂と粘土の違いも，粘土に粘着力がない分だけ，話が余計にややこしくなって，やはりまったく説明できない。

紛れるのを懼れて本報文では述べることはしないが，土の，それも特に砂が強く持つ誘導異方性（負荷方向の変化に伴う有効応力変化に応じて現れる異方性）もカムクレイモデルでは説明できない。

過圧密粘土の負荷時の挙動は，カムクレイモデルに新たに橋口の下負荷面概念を導入することによって解決を見る。粘土の二次圧密や砂の締固め，もっと言えば砂と粘土の違いは，浅岡らによる上負荷面概念をカムクレイモデルに導入して初めて解決の糸口が見える。

土の誘導異方性はカムクレイモデルにおける応力比η

$$\eta = q/p' \qquad (1.10)$$

を関口のη^*（その定義は，この報文で異方性の話題に触れることはないので，省略する）に変更の上，橋口・チェンによる回転硬化概念をカムクレイモデルに導入して大凡の解決が着く。日本人研究者の独壇場のように見えるが，じっさいそうであった。

要約すれば，先ほど述べたカムクレイモデルの限界は，カムクレイモデルを間違った理論だと否定するのではなくて，カムクレイの当時には考えられていなかった，異なる階層に属する概念，一言すれば土の骨格構造概念（過圧密，構造，異方性），をカムクレイモデルの上に新たに積み重ねることによって，克服された。カムクレイモデルはその重みに耐えているのであり，土質力学の理論的基礎という地位は，だから今でも全く失っていない。

2　カムクレイモデルとは何か

物理でなく力学だからどうしても数学がいる。しかしこの報文では，ベクトルも含め，等水頭線に直交する最急勾配の方向に水が流れるというダルシー則を理解する数学があれば，それで十分とする。応力もひずみもテンソルだが，スカラー感覚で述べる。応力も，三軸圧縮試験（$\sigma_1>\sigma_2=\sigma_3$）を念頭に，せん断応力$q$（$=\sigma'_1-\sigma'_3$）と平均有効応力$p'$（$=(\sigma'_1+2\sigma'_3)/3$）としか使わない。$q$と$p'$とに対応するせん断ひずみ$\varepsilon_s$と体積ひず

みε_vは出てきたときに定義するが，すべてがスカラー量である。常に三軸圧縮試験を念頭にお読みください。

2.1.　カムクレイモデルの降伏関数

本章全般の理解を助けると思うので，図2.1の銅の棒の一次元引張試験を説明する。

銅の棒は殆ど正確に図2.1のような引張力と伸びの関係を示すが，銅の状態が直線A-B-C上にあるとき銅は降伏状態（あるいは負荷状態）にあるという。A点よりB点のほうが，降伏応力が高くなっている。つまりO点からA点を見るよりO'点からB点を見るほうが，同じ銅なのに硬くなっている。その理由を伸びに塑性成分が出たためであると考え（図2.1），それでA点からB点への降伏点の上昇のことを，塑性学ではひずみ硬化と言っている。

降伏状態や負荷状態など，言葉も概念も難しそうだが，土の言葉に置き換えれば昔から使われている正規圧密状態のことで，こう言えば大いに納得が進む。しかし土は，図2.1の引張力に代わって力にはqとp'の二つが出て来るから，図2.1に比べるとはるかに難しくなってしまう。以下説明不足になりがちだが，結論的な事項を順に述べてゆく。

十分に練り返した粘土を等方（q=0）状態で圧密したときの正規圧密線は比体積vとp'の自然対数とで一本の直線

$$v\,(=1+\mathrm{e})=\mathrm{N}-\tilde{\lambda}\ln p' \quad \text{ここに}\ q/p'=0 \tag{2.1}$$

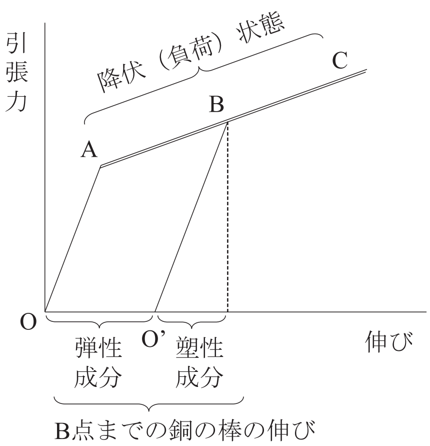


図2.1　銅の棒の（一次元）引張試験

と書かれることは周知である。図2.2に示す。切片N（ギリシャ文字vの大文字）は$\ln p'$=0のときの比体積。

つぎに等方に正規圧密した粘土を非排水せん断および排水せん断したときに得られる実験の最終状態は図2.3のように，きれいに次式の直線

$$q=\mathrm{M}p' \tag{2.2}$$

上に並ぶ。直線上に並ぶことは周知であるが，式（2.2）は限界状態線と呼ばれたりする。この式の勾配はギリシャ文字μの大文字Mである。

上記式（2.2）の最終状態をモール円で書いたときに得られる内部摩擦角ϕ'とは

$$\mathrm{M}=\frac{6\sin\phi'}{3-\sin\phi'} \tag{2.3}$$

の関係がある。

限界状態という言葉は，実は日本語が正しくないが，非排水せん断試験と排水せん断試験での最終状態の特徴は重要で，それは次節2.2で説明するが，ここでは式（2.2）の直線上にある土の間隙比ないし比体積はすべて異なっていることが重要である。分りやすくそれも図2.3中に示したが，だからこの最終状態での比体積vと$\ln p'$の関係は，図2.2中にも書き込むことができる。そうすると，まことに不思議だが，図2.4のように2本の線は平行で同じ勾配$\tilde{\lambda}$を持つことがわかる。それで式（2.2）の限界状態線を比体積vと$\ln p'$で

$$v\,(=1+\mathrm{e})=\Gamma-\tilde{\lambda}\ln p' \quad \text{ここに}\ q/p'=\mathrm{M}\ \text{で一定} \tag{2.4}$$

のように書く。

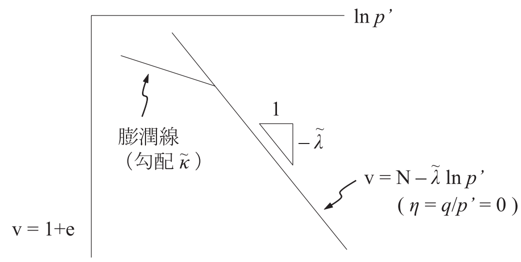


図2.2　等方正規圧密線（η=0でのe-$\ln p'$関係）

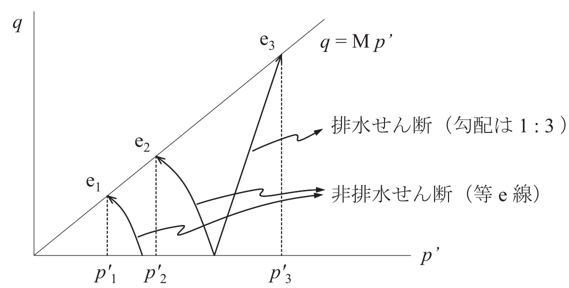


図2.3　非排水せん断と排水せん断の最終応力状態q=Mp'

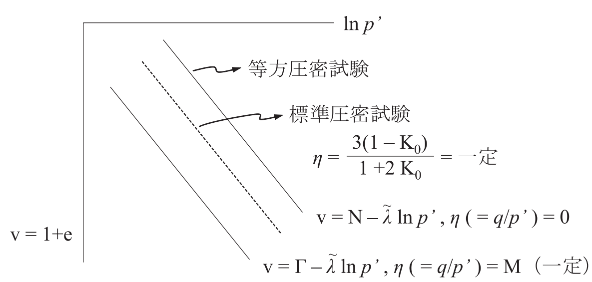


図2.4　2本の平行線

実は一次元標準圧密試験（K_0試験）でも，試験中$K_0=\sigma'_3/\sigma'_1$が一定つまり応力比$\eta=3(1-K_0)/(1+2K_0)$が一定で，しかも等方圧密線と同じ勾配λを持つことが知られている。大事だからこれも図2.4に書き込んでおいた。

正規圧密粘土の等方圧密中も一次元圧密中も，そして（非排水・排水）せん断試験中も，粘土は負荷状態（図2.1でいう降伏状態）にあると考えると，図2.3と図2.4は，負荷中の土はqとp'と比体積v（あるいは間隙比e）が一

意の関係にあることを示している。qとp'が決まれば，比体積v（間隙比e）は決まってしまう，p'と比体積v（あるいは間隙比e）を指定するとすでにqは決まってしまっている，などである。さきほど「不思議なことに平行」などと述べたが，これらは，長い時間をかけた大変な試行錯誤を経てようやく得られた，正規圧密粘土についての厳粛な実験事実なのである。

1950年代にロンドン大学Imperial CollegeでSkemptonのもとBishopやHenkelらによって既に得られていた。

不思議であっても揺るぎない実験事実と受け止めることが大事で，「なぜか?」と力学的に問うことはできない。

図2.3と図2.4という風に2枚の図がいるのは比体積v／間隙比eとqとp'との3変数があるからで，式で書くほうが分かり易くなる。式(2.2)と式(2.4)で，応力比ηによって変化するのは切片Nと切片Γだけである。それでこの切片を一般に$x(\eta)$と書いて

$$x(\eta=0)=\mathrm{N}\,,\qquad x(\eta=\mathrm{M})=\Gamma \tag{2.5}$$

の間を一番簡単な線形補間すると

$$x(\eta)=\mathrm{N}+\frac{\Gamma-\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\left(\frac{q}{p'}\right) \tag{2.6}$$

が得られる。なるほどこれは式(2.5)をみたす。だから図2.4の二本の平行線を稠密に埋める平行線群は，

$$\mathrm{v}=\mathrm{N}+\frac{\Gamma-\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\left(\frac{q}{p'}\right)-\tilde{\lambda}\ln p' \tag{2.7}$$

と表せる。これが銅の棒の降伏状態（図2.1）に代わる練返し粘土の降伏状態（正規圧密状態）を表す一般式である。比体積v／間隙比eとqとp'との三次元の空間で式(2.7)を描くと，昔Roscoe面と呼ばれていた一枚の曲面になる。正規圧密粘土はこのRoscoe面上に存在し，除荷時はその内部に入るから，Roscoe面は状態境界面と呼ばれる。

さて，ある練返し正規圧密粘土が，例えば初期状態（$\mathrm{v}=\mathrm{v}_0$, $p'=p'_0$, $q=0$）から今の状態（v, p', q）に変化したとしよう。そうすると式(2.7)から，この間の体積ひずみは

$$\begin{aligned}\varepsilon_v&=\frac{(1+\mathrm{e}_0)-(1+\mathrm{e})}{1+\mathrm{e}_0}\\&=\frac{1}{1+\mathrm{e}_0}\left\{\frac{\mathrm{N}-\Gamma}{\mathrm{M}}\left(\frac{q}{p'}\right)+\tilde{\lambda}\ln\frac{p'}{p'_0}\right\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

のように計算される。すでに述べたがひずみは，図2.1のように，弾性成分と塑性成分の和に分けて$\varepsilon_v=\varepsilon_v^e+\varepsilon_v^p$と書くと，弾性成分は図2.2の膨潤線の勾配を使って

$$\varepsilon_v^e=\frac{\tilde{\kappa}}{1+\mathrm{e}_0}\ln\frac{p'}{p'_0} \tag{2.9}$$

で得られるから，式(2.8)の全体積ひずみのうち，塑性成分は

$$\begin{aligned}\varepsilon_v^p&=f(p',q)\\&=\frac{1}{1+\mathrm{e}_0}\left\{\frac{\mathrm{N}-\Gamma}{\mathrm{M}}\left(\frac{q}{p'}\right)+\left(\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}\right)\ln\frac{p'}{p'_0}\right\}\\&=f_{\boldsymbol{\sigma}'}(\boldsymbol{\sigma}')\end{aligned} \tag{2.10}$$

のように書かれる。これがオリジナルのカムクレイモデルの降伏関数と呼ばれるものである。式(2.10)の最終表現は塑性体積ひずみ（スカラー）がスカラー値の応力テンソル関数であることを書いたものである。

式(2.10)からは塑性力学の仮説に基づいて何もかもが数学的には一瀉千里だが，式(2.10)だけは繰り返し述べるが，いくつかの不思議な実験事実，e–lnp'の直線関係と平行線関係，だけに基づいている。著者はだからカムクレイモデルのことを長く「e–logp'の土質力学」と呼んでいる。この軽い表現は，多くの専門家から顰蹙を買っているかもしれない。しかし，摩擦エネルギーとか塑性消散エネルギーとかが持つ，人を近づき難たくする独特の匂いはすっかり消えていると思うが如何?

2.2.　流れ則

鉄の棒は捩じってから引っ張るのと引っ張ってから捩じるのとで，塑性変形後の最後の形は異なる。土でも圧縮してからせん断するのと，せん断してから圧縮するのとで最後の供試体の形は同じではない。このように塑性ひずみは一般に負荷経路によって異なってくる。しかし式(2.10)は，土では塑性圧縮ひずみだけは，他の塑性ひずみ成分と異なり，負荷経路が異なっても，最初の応力状態と最後の応力状態だけで一意に決まることを言っている。重力場の位置のポテンシャルと同じである。だから，勾配をとれば意味のある物理量が出て来るというポテンシャル概念に倣って，式(2.10)を土の塑性ポテンシャルと見なし，塑性ひずみ速度テンソルを，式(2.10)の勾配をとって，

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\lambda\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}\,,\qquad \lambda>0 \tag{2.11}$$

で求めようとするのは自然である。降伏関数が同時に塑性ポテンシャルでもあるから，式(2.11)は関連流れ則と呼ばれる。

式(2.11)は，土の中の水の流れ，いわゆるダルシー則

$$\boldsymbol{v}=-k\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{2.12}$$

を思い出すと理解が進む。ここに水頭$h(x)$は位置xのスカラー値ベクトル関数で，vは水の流速ベクトル。透水係数kの前の負号は水が水頭の高いところから低いところへ流れることを示す。

式(2.11)の係数λは透水係数のように定数でなく有効応力ないし塑性ひずみの関数であるので，塑性乗数と呼ばれる。それが正のときだけ式(2.11)が適用されることは2.3で述べる。

式(2.11)は両辺がテンソルなので絵にも図にも描けないが，有効応力テンソルσ'を成分がp'とqの二次元ベクトル，塑性ひずみ速度テンソル$\dot{\varepsilon}^p$も成分が塑性体積ひずみ速度$\dot{\varepsilon}_v^p$と塑性せん断ひずみ速度$\dot{\varepsilon}_s^p$の二次元ベクトルに置きなおすと，式(2.11)同形対応の

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_v^p=\lambda\dfrac{\partial f}{\partial p'}\\[2ex]\dot{\varepsilon}_s^p=\lambda\dfrac{\partial f}{\partial q}\end{cases} \tag{2.13}$$

なる関係式が得られ，式(2.11)はp'とqの二次元空間でベクトルの図にかきなおすことが出来る。ここに

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_v^p=\dot{\varepsilon}_1^p+2\dot{\varepsilon}_3^p\\[1ex]\dot{\varepsilon}_s^p=\dfrac{2}{3}\left(\dot{\varepsilon}_1^p-\dot{\varepsilon}_3^p\right)\end{cases} \tag{2.14}$$

である。p'には1/3が付くのに$\dot{\varepsilon}_v^p$には1，qには1なのに$\dot{\varepsilon}_s^p$には2/3が付いたりしてややこしいが，すべては式(2.13)が式(2.11)と同じ形をとるようにさせるためである。そうすると式(2.10)の降伏関数と式(2.13)の流れ則とをp'とqとの二次元空間に描くことができて，図2.5が得られる。

さて説明を保留していたが，非排水せん断や排水せん断の最終状態では，有効応力に変化がないのにせん断ひずみが不定で，しかもこのとき土の体積が変化しないことが知られている。それは図2.6に描いたが，これは周知のことである。有効応力に変化がなければひずみ速度の弾性成分の変化もないから，体積ひずみ増分$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_v^e + \dot{\varepsilon}_v^p$において$\dot{\varepsilon}_v^e$=0，だから図2.6は

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial p'} = 0 \qquad \text{at} \quad q = \mathrm{M}p' \tag{2.15}$$

を示していることになる。これを実際に式(2.11)に式(2.10)を入れて計算してみると，

$$\mathrm{N} - \Gamma = \tilde{\lambda} - \tilde{\kappa} \tag{2.16}$$

が出て来てパラメータが一つ減り，このとき限界状態q=Mp'で降伏関数に立てた法線ベクトルは真上を向き，塑性ひずみ速度の横軸成分の塑性体積ひずみ速度はゼロとなる。これを改めて図2.7に示した。
図2.7からは直ちに，次の関係が従う。

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_v^p > 0 & \text{when} \quad q < \mathrm{M}p' \\ \dot{\varepsilon}_v^p < 0 & \text{when} \quad q > \mathrm{M}p' \end{cases} \tag{2.18}$$

これを図2.8に示した。かくして限界状態線q=Mp'

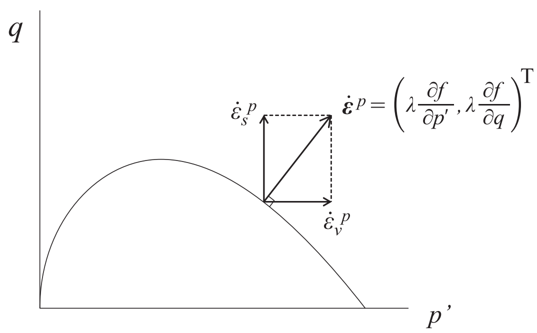


図2.5　q–p'図上に描いた流れ則

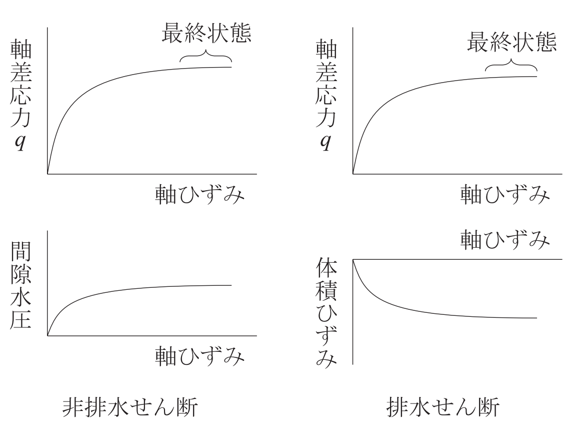


図2.6　せん断試験の最終状態

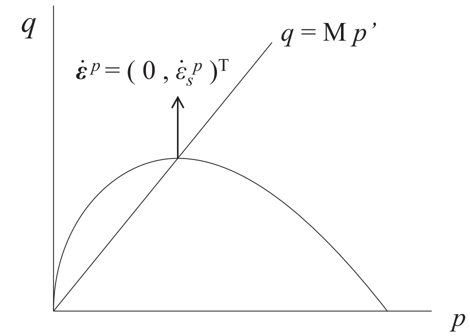


図2.7　$\dot{\varepsilon}_v^p$=0 at$q$=Mp'の図

は塑性膨張と塑性圧縮の閾線になっていることが分かる。

2.3.　硬化と軟化の閾線としての限界状態線q=Mp'

塑性体積ひずみε_v^pの増分（速度と言ってきたものだがこれはダルシー則に倣って出てきた言葉で，速度に代わって増分と呼ぶことも多い。透水係数と違って塑性乗数λに時間の概念は陽に出てこないからである）は降伏関数，式(2.10)の全微分をとっても求めることができる。それと式(2.13)第1式とを等置すると塑性乗数λは応力タームで

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial p'}\dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q}}{\frac{\partial f}{\partial p'}} \tag{2.19}$$

のように求められる。式(2.11)で，流れ則が適用される負荷状態にあるときはλが正と述べたが（透水係数が正にあたる），λが正の負荷状態は，式(2.19)の分子分母とも正，分子分母とも負に分かれることが分かる。つまり

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial p'}\dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q}}{\frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{\mathrm{M}(1+\mathrm{e}_0)}\frac{1}{p'}\left(\mathrm{M} - \frac{q}{p'}\right)} \tag{2.20}$$

式(2.19)の全微分の分子（式(2.20)の左辺）は塑性ひずみ増分ベクトルと応力増分ベクトルの内積だから，内積が正のときは二つのベクトルのなす角は90度以内，負のときは90度以上であるから，絵にかくと図2.9のようになり，限界状態線q=Mp'は，今度は硬化（点線の後続降伏面が拡大）と軟化（点線の後続降伏面が縮小）の閾線になっていることをすることを意味する。冒頭に示した銅の棒の一次元引張試験の図2.1は硬化の例で，A点以後，引張応力の増分が降伏状態を維持するとき（AからB，Cを辿るとき）降伏点が増加し銅の棒が硬化していることを示している。

2.4.　増分型弾塑性構成式と負荷基準

この節の内容は，残念だが，2.2，2.3節のように，ダルシー則に倣った分かり易い数式では書くことは難しい。何故なのか?要点だけを記すが，最初は読み飛ばしてもよい。

ひずみ（全ひずみ）増分は，次式のように弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分の和で表すが，

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{2.21}$$

有効応力増分$\dot{\sigma}'$は必ず弾性ひずみ増分$\dot{\varepsilon}^e$をともなう。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} \tag{2.22}$$

だから，有効応力増分$\dot{\sigma}'$とひずみ増分$\dot{\varepsilon}^{e}$の関係を表す増分型の弾塑性構成式は

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}}' &= \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} = \mathbf{E}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}) \\ &= \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda\mathbf{E}\frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial\boldsymbol{\sigma}'} \\ &= \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Lambda\mathbf{E}\frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}\end{aligned} \tag{2.23}$$

から得られる。ここで式中の塑性乗数Λはλと同じものだが，式(2.19)のように応力増分タームではなく全ひずみ増分$\dot{\varepsilon}$で表されていなければならない。それで式(2.23)は大文字のΛを使っている。全ひずみタームで表す塑性乗数$\Lambda(=\lambda)$の誘導は容易だが，ここでは省略する。式(2.23)は式(2.11)と同様に絵には書けない。ダルシー則に倣ってはもう書けないと述べたが，式(2.22)も式(2.23)応力増分テンソルとひずみ増分テンソルの線形関係式だが，ベクトルとベクトルの線形関係を表すのに，ダルシー則や式(2.13)のような「定数係数」は措いて，一般には「行列」がいるように，式(2.22)，式(2.23)では4階のテンソルEが要る。その図式化は難しい。

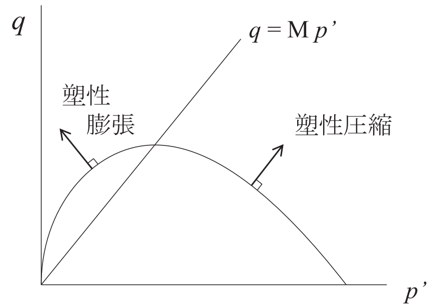


図2.8　塑性膨張，塑性圧縮の閾線としての限界状態q=Mp'

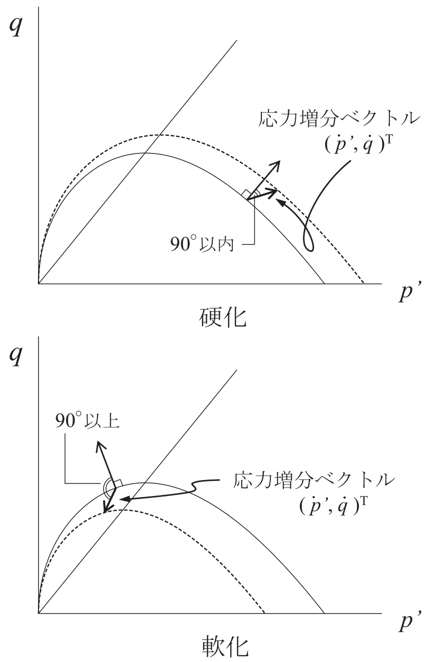


図2.9　q=Mp'は硬化と軟化の閾線

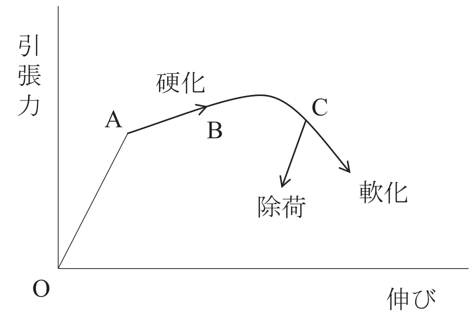


図2.10　一次元の棒の引張試験にとった硬化，軟化と除荷

$\Lambda(=\lambda)>0$が，負荷の，すなわち応力増分が塑性ひずみ増分を伴うときの要件だが，除荷のときは$\Lambda(=\lambda)<0$となり，弾性ひずみしかでない。この負荷基準の詳細もここでは述べないが，一次元の棒の引張試験を例に図2.10に示す。応力増分の向きが応力低下を示すとき，除荷と図2.9右の軟化との区別は紛らわしいが重要で，負荷基準は土質力学を計算に載せるとき，欠くことが出来ない。

2.5.　カムクレイモデルの要点

限界状態という言葉は，カムクレイモデルが日本に輸入された当時に，Critical Stateの和訳として用いられた。しかし限界状態というと，そこを超えてはならない極限状態Limit Stateのような語感があり，正しい和訳とは言いにくい。

水は0℃以下では氷，つまり固体で，0℃を超えると液体になり，100℃をこえると気体になる。このように水が相変化するとき，0℃や100℃では水はCritical Stateにあると言われる。これと同じで，限界状態線q=Mp'は土が塑性膨張するか塑性圧縮するかの閾線であり(図2.8)，同時に土が硬化するか軟化するかの閾線でもある。

カムクレイモデルは，開発された英国では，Critical State Soil Mechanicsと呼ばれているが，それを限界状態土質力学と訳すのは正しくない。それならば「e–lnp'の土質力学」と呼ぶほうが何倍も事実に即している。

以上を受けて，カムクレイモデルの要点は以下の4つにまとめることができる。

① 土の硬化は必ず塑性圧縮だけを伴い，それは限界状態線(critical state line)q=Mp'の下側でのみ起こる。

② 一方，土の軟化は必ず塑性膨張だけを伴い，それは限界状態線(critical state line)q=Mp'の上側でのみ起こる。

③ そして，限界状態係数(critical state parameter) Mは土ごとに決まっている土質定数で，負荷時に生じる土の塑性変形に対しても変化することがない。

④ 応力状態が降伏面内部を動くとき(除荷と再載荷時)は，土は弾性変形のみが生じる。

残念だが，①から④までのすべては，実際にある土には全く当てはまらない。それを次章で順に説明する。

③ 現代土質力学入門

①から④のカムクレイモデルの要点は実際の土には当てはまらないが，それがどのように克服されたかを見るためには，カムクレイモデルに新たに上負荷面と下負荷面を導入するだけで十分である。本来はさらに誘導異方性の導入が極めて重要なのだが，「入門」の視野を超えると考え，この報文で述べることはしない。

式による説明も3.2，3.3節以外は最小限にとどめる。前章のカムクレイモデルの理解があれば，図示による説明だけで十分と考えた。このような試みは，実は著者には初めてのことだが，カムクレイモデルを理論的基礎と呼んだ所以が読者に伝わればと思う。

3.1.　過圧密の解消と骨格構造の劣化

カムクレイモデルは，十分に練り返した粘土を正規圧密状態に置き，その後の再圧密圧縮挙動と非排水・排水せん断挙動だけを基礎に組み立てられた。だから①その正規圧密粘土を除荷して過圧密状態にしたのち，再圧縮でどのように正規圧密状態に戻るのか（過圧密の解消）と，②自然堆積状態にある乱さない粘土と練り返した粘土との圧縮・せん断挙動の相違，の2つは理論の外にあった。

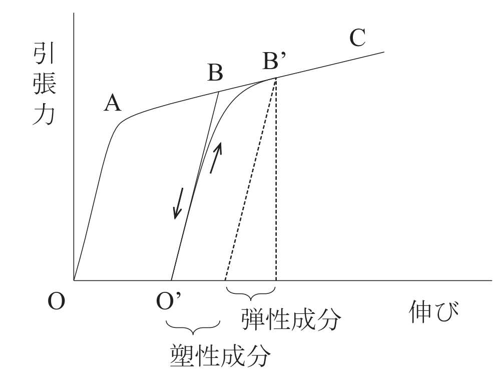


図3.1　O'点から弾塑性状態ABCへの再負荷

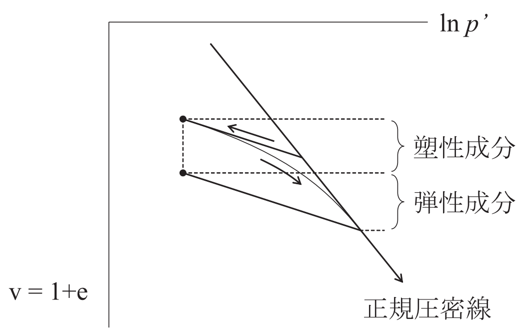


図3.2　練返し過圧密粘土の再圧縮

図3.1は，例により棒の引張試験だが，除荷を受けた棒が再び元の弾塑性状態に戻るには塑性ひずみが生じる必要があることを示している。昔は弾性ひずみだけで元の弾塑性状態に戻ると考えられていたから，（銅の棒の場合にはわずかの塑性ひずみだが）それを見逃さなかった橋口の功績は偉大である。

図3.2は十分に練り返した粘土のe–lnp'図で同じことを説明したものである。過圧密の解消には塑性変形が必要だが，それを表すためにカムクレイ降伏関数の内部に，それと相似な過圧密土の現応力を通る下負荷面が導入される。過圧密の解消（正規圧密化）が必ず塑性膨張を伴うことは後述する。

図3.3は，十分に練り返された正規圧密粘土のe–lnp'と，練り返される前の，できるだけ乱さないように採取された粘土の圧縮過程のe–lnp'図を重ねたものである。乱さない粘土は練り返した粘土に比べ，力が同じならそれをより大きい間隙比で支えることができ，間隙比が同じならより大きい力を支えることができることを示している。これは骨格構造の働きと呼ばれ，図3.3にみるように，この働きは塑性変形とともに失われてやがて乱された粘土のe–lnp'線に上から重なってゆく。この過程を表すのに浅岡らは正規圧密粘土では不可能な領域にカムクレイ降伏関数と相似な上負荷面を導入して説明した。骨格構造の劣化が必ず塑性圧縮を伴うことは後述する。

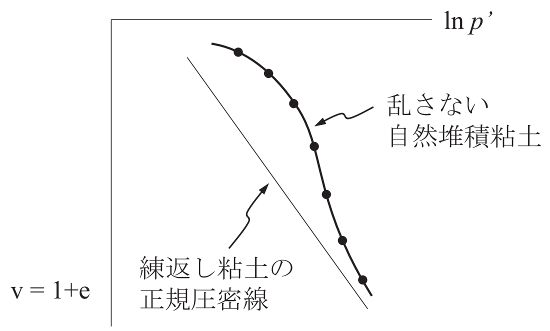


図3.3　練返し粘土と乱さない自然堆積粘土の圧密係数

3.2.　上負荷面・下負荷面が導入されたカムクレイモデルの降伏関数

粘土という言葉を使って最初に3段階でモデルの組み立て図式的に述べ，そのあとモデルを式示する。このモデルが砂にも当てはまることは3.4節以降で説明される。

① カムクレイモデルは，完全に練り返された正規圧密粘土の負荷時の弾塑性挙動だけを表すとする。

② 式(2.7)に表した状態境界面の外側（不可能領域）にカムクレイ降伏面と形が相似（相似中心は$p'=0$，$q=0$）な上負荷面の存在を仮定する。骨格構造の発達した粘土（乱されていない粘土）の弾塑性挙動は，この上負荷面に関連流れ則をあてはめて記述する。図3.4にそれを示した。図中には相似比R^*を定義している。対応するp'とqには上付き〜と上付き－を付けている。

粘土が応力状態を上負荷面上にとるとき，その土は正規圧密状態にあると呼ばれる。

③ 最初上負荷面上にあった乱されていない粘土が除荷を受けて応力状態が上負荷面内部にはいると，その粘土は過圧密状態にあると呼ばれる。過圧密状態にある粘土が再負荷を受けるとき，その弾塑性挙動は下負荷面に関連流れ則を適用して定める。

下負荷面は上負荷面と形が相似（相似中心は再び$p'=0$，$q=0$）で，図3.5中には相似率Rを定義している。

下負荷面上の応力はp'とqとで表す。相似率Rは，いわゆる過圧密比の逆数であることに注意する。

以上の3段階の説明から，カムクレイの降伏面（式(2.10)と同じ），上負荷面，下負荷面はそれぞれ次のように得られる。

カムクレイ降伏面

$$\varepsilon_v^p = f(\tilde{p}', \tilde{q}) = \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{1+\mathrm{e}_0}\ln\frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}_0'} + \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{\mathrm{M}(1+\mathrm{e}_0)}\frac{\tilde{q}}{\tilde{p}'} \tag{3.1}$$

この式にカムクレイ降伏面と上負荷面の相似率

$$\tilde{p}' = R^*\bar{p}', \qquad \tilde{q} = R^*\bar{q} \tag{3.2}$$

を代入すると上負荷面は

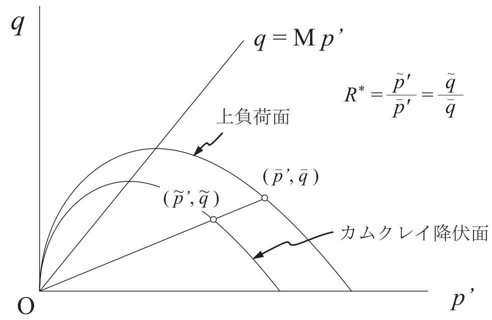


図3.4　上負荷面と相似比R^*

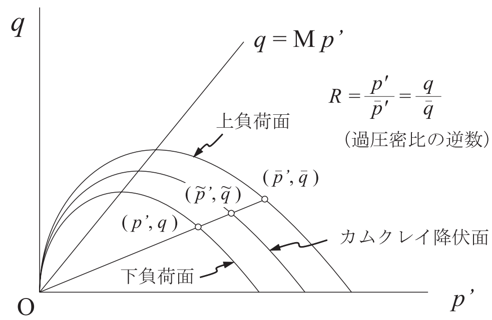


図3.5　下負荷面と相似比R

$$\begin{aligned}\varepsilon_v^p &= f(\bar{p}', \bar{q}) + \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{1+\mathrm{e}_0}\ln R^* \\ &= \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{1+\mathrm{e}_0}\ln\frac{\bar{p}'}{\tilde{p}_0'} + \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{\mathrm{M}(1+\mathrm{e}_0)}\frac{\bar{q}}{\bar{p}'} \\ &\quad + \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{1+\mathrm{e}_0}\ln R^*\end{aligned} \tag{3.3}$$

のように式示される。これに，さらに下負荷面と上負荷面の相似率（過圧密比の逆数）

$$p' = R\bar{p}', \qquad q = R\bar{q} \tag{3.4}$$

を代入すると，下負荷面

$$\begin{aligned}\varepsilon_v^p &= f(p', q) + \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{1+\mathrm{e}_0}(\ln R^* - \ln R) \\ &= \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{1+\mathrm{e}_0}\ln\frac{p'}{\tilde{p}_0'} + \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{\mathrm{M}(1+\mathrm{e}_0)}\frac{q}{p'} \\ &\quad + \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{1+\mathrm{e}_0}(\ln R^* - \ln R)\end{aligned} \tag{3.5}$$

が得られる。

自然堆積の乱されていない粘土は必ず骨格構造が発達していて，しかも大抵は多かれ少なかれ過圧密状態にある。このため，その現応力状態p'とqは一般に下負荷面，式(3.5)の上にある。

3.3.　硬化と軟化の閾線としての新しい限界状態線q=M$_s p'$

前章2.3のように，式(3.5)の全微分をとって塑性体積増分を求めると

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{f}(p', q) + \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{1+\mathrm{e}_0}\left(\frac{\dot{R}^*}{R^*} - \frac{\dot{R}}{R}\right) \tag{3.6}$$

が得られる。この式からも，あるいは式(3.5)から直接でも，次のふたつを読み取ることが最も重要である。それは，①過圧密が解消してゆくとき，すなわちRが増加($\dot{R}$>0, R→1)するときは土の塑性膨張を伴い，②一方，構造が劣化してゆくとき，すなわちR^*が増加($\dot{R}^*$>0, R^*→1)するときは土の塑性圧縮を伴う，ことである。①の過圧密の解消のときの塑性膨張は，固くインターロッキングした土が解きほぐされるときは膨張する，と昔言われていたことに当てはまる。一方②の構造の劣化時の塑性圧縮は，カードハウス構造はそれが壊れると必ず土は圧縮すると言われていたことに対応する。

さて式(3.6)に現れるRとR^*の時間微分は塑性変形が進むときいずれも正の値をとるが，それをここでは

$$\dot{R} = U\dot{\varepsilon}_s^p, \qquad \dot{R}^* = U^*\dot{\varepsilon}_s^p \tag{3.7}$$

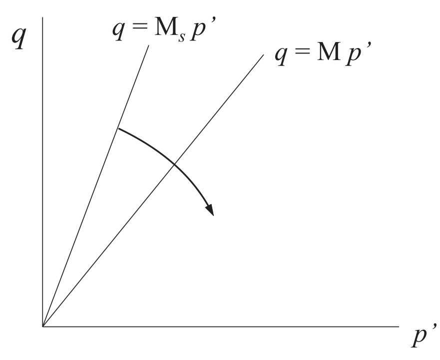


図3.6　過圧密の解消は$\mathrm{M_s}$の減少

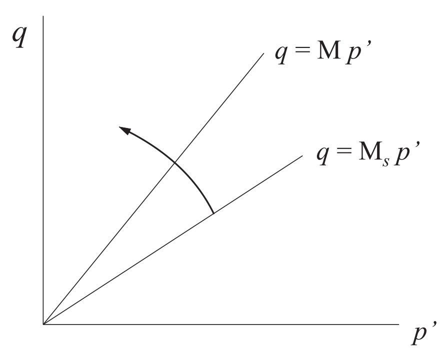


図3.7　構造の劣化は$\mathrm{M_s}$の増加

のように表す。塑性せん断ひずみ増分$\dot{\varepsilon}_s^p$を塑性変形進

行の目印にしているがそれは簡単のため。式(3.7)のUとU^*はいずれもRとR^*の正のスカラー関数であり，粘土の場合，過圧密粘土の負荷挙動と構造の発達した粘土の負荷挙動の実験に基づいて定められ，砂の場合は緩い砂の締固め実験などから定められる。式(3.7)はRとR^*の発展則と呼ばれる。

さて以上をもとに，2.3と同じ要領で下負荷面から関連流れ則に従って塑性乗数λを求めると，

$$\lambda=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial p'}\dot{p}'+\dfrac{\partial f}{\partial q}\dot{q}}{\dfrac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{\mathrm{M}(1+\mathrm{e}_0)}\dfrac{1}{p'}\left(\mathrm{M}_s-\dfrac{q}{p'}\right)} \tag{3.8}$$

が得られる。ここに式中の$\mathrm{M_S}$は2.3節の式(2.19)と異なり，

$$\mathrm{M}_s=\mathrm{M}\left\{1-\frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{\mathrm{M}(1+\mathrm{e}_0)}\frac{U^*}{R^*}+\frac{\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa}}{\mathrm{M}(1+\mathrm{e}_0)}\frac{U}{R}\right\} \tag{3.9}$$

となって定数ではない。カムクレイモデルのときのように（2.3節），新しい限界状態線$q=\mathrm{M_S}P'$が硬化と軟化の閾線

$$\begin{cases} q<\mathrm{M}_s p' \text{のとき} \\ \dfrac{\partial f}{\partial p'}\dot{p}'+\dfrac{\partial f}{\partial q}\dot{q}>0\text{：硬化} \\ q>\mathrm{M}_s p' \text{のとき} \\ \dfrac{\partial f}{\partial p'}\dot{p}'+\dfrac{\partial f}{\partial q}\dot{q}>0\text{：軟化} \end{cases} \tag{3.10}$$

となるのは同じだが，式(3.9)から類推されるように，過圧密が解消し，Rが増加($\dot{R}>0$，$R\to1$)するときは$\mathrm{M_S}$の減少をもたらし，骨格構造が劣化し，R^*が増加($\dot{R}^*>0$，$R^*\to1$)するときは$\mathrm{M_S}$の増加をもたらす。もっと言えば，①の過圧密の解消のときの塑性膨張は$\mathrm{M_S}$の減少，つまり内部摩擦角ϕ'の減少をもたらすのであり，一方②骨格構造の劣化時の塑性圧縮は，$\mathrm{M_S}$の増加，すなわち内部摩擦角ϕ'の増加をもたらすのである。内部摩擦角ϕ'は，カムクレイモデルが前提とする定値の土質定数ではないことになる。以上を図3.6と図3.7に示した。

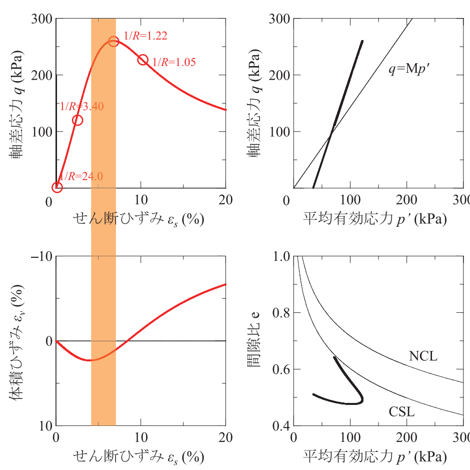


図3.8　練返し超過圧密粘土の排水せん断

一方，塑性膨張と塑性圧縮の閾線は降伏面がカムクレイと同じ形だから，$q=\mathrm{M}P'$線で与えられる。だから$q=\mathrm{M_S}P'$線の上下によって，塑性膨張を伴う硬化も塑性圧縮を伴う軟化も起こりうることになる。図3.8はよく知られた完全練返し粘土だが過圧密の粘土の排水せん断挙動を示すが，これは図3.9のように体積膨張を伴う硬化域で観測される。

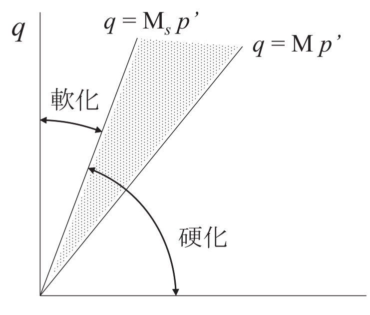


図3.9　$\mathrm{M_S}>M$のとき塑性膨張を伴う硬化が現れる

つぎに図3.10は，自然堆積の乱さない構造の発達した正規圧密粘土の非排水せん断試験の典型例だが，これは図3.11に示すように$q=\mathrm{M}P'$線の下側，しかも$q=\mathrm{M_S}P'$線の上側で起こる体積圧縮を伴う粘土の硬化で説明される。

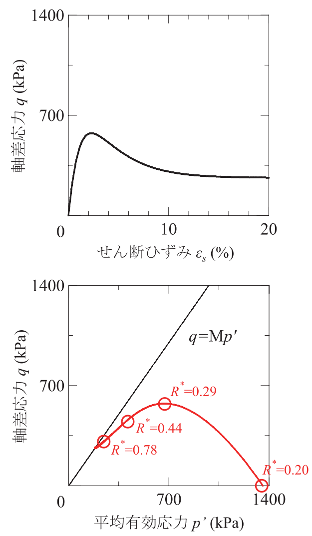


図3.10　構造の発達した自然堆積正規圧密粘土の非排水せん断

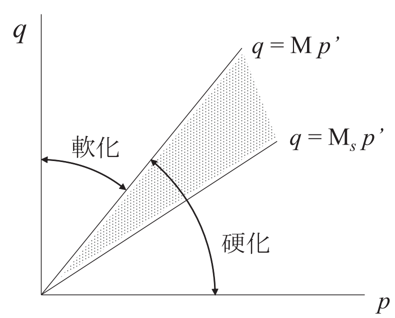


図3.11　$\mathrm{M_S}<\mathrm{M}$のとき塑性圧縮を伴う軟化が現れる

これら図3.8～図3.11はいずれもカムクレイモデルが対象にできなかった粘土のせん断挙動が，上・下負荷面の導入による新しいモデルの新しい限界状態線$q=M_S P'$によって合理的に説明できることを示している。

上・下負荷面を導入したカムクレイモデル（SYS Cam-clay modelと呼ばれることが多い）の発展則に含まれるパラメータの決定については，4.4で説明される。

3.4.　砂と粘土はどう違うか？

過圧密の解消は負荷による塑性変形の進展によって加（$\dot{R}>0$, $R\to1$）進行し，やがて正規圧密状態に戻る。同じように構造の劣化も負荷による塑性変形の進展によって加（$\dot{R}^*>0$, $R^*\to1$）進行し，やがて完全練返し状態に戻る。このとき，単位の塑性変形の進展によって，過圧密の解消が速く起こるか，構造の劣化が速く起こるかを問うことができる。結論を言えば粘土では過圧密の解消が早く進展し，構造の劣化は遅い。砂では逆に構造の喪失は早いが，過圧密の解消は極めて遅く，大塑性変形が必要になる。これを図3.12に示した。

どちらが速いかと言ってもそれは程度問題で，粘土っぽい砂もあれば，砂っぽい粘土もあり，図3.12のグラデーションはそのことを表している。砂と粘土は線引きして明確に分けられるものではないことがわかる。

図3.13は，骨格構造の劣化に着目して，典型的な砂の締固め圧縮と典型的な粘土の二次圧密が，図3.12のどこで起こるかを示したものである。

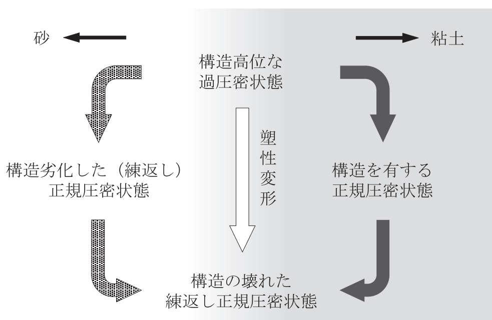


図3.12　砂と粘土の違い

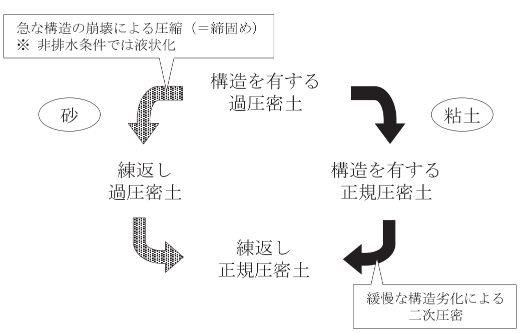


図3.13　構造の喪失による砂の締固めと粘土の二次圧密

3.5.　砂の締固め

次の4章ではもっぱら粘土の鋭敏比や二次圧密を説明するので，ここでは砂の締固めについて，上負荷面・下負荷面が導入されたカムクレイモデルの計算を通じてもう少し説明を進める。

締固めは，微小な振幅の繰り返しせん断によって起こる。それを図3.14に示した。せん断ひずみ振幅は0.3%である。緩い砂は最初の数回の繰り返しせん断で大圧縮を示すが，締固まってくると繰り返し回数を増やしてもやがて圧縮しなくなる。モデル計算はそれをよく示している。この繰り返しせん断の途中段階での砂の状態がどのようであるか，過圧密比（$1/R$）と骨格構造の状態R^*を用いて示したものが図3.15である。R^*が締固めの最終段階で$R^*=0.776$と1近く骨格構造はかなり喪失に到達している一方，締固めによる過圧密比の増大が著しいのがわかる。その理由を考える。

図3.12，3.13で，砂は負荷による過圧密の解消が少ないといったが，それは負荷中の下負荷面のsizeの増大が上負荷面のsizeの増大に比べ，たとえ少しは大きいといえ，ほとんど同程度でsizeの比率がほとんど変化しないことを意味する。ところが負荷によって拡大された上負荷面は除荷によってその位置を変えないのに，下負荷面は除荷による現応力の減少に追随して著しく縮小する。過圧密比は上負荷面と下負荷面のsizeの比だから，繰り返しせん断のたびに上負荷面だけがsizeを拡大し，下負荷

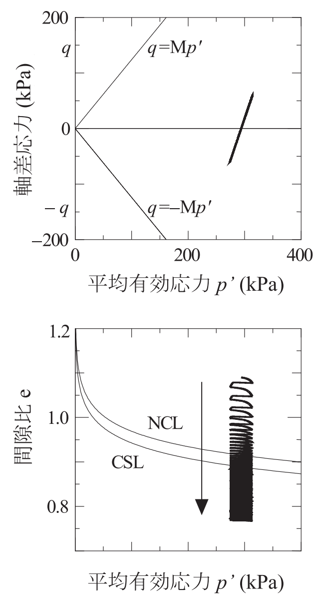


図3.14　繰返しせん断による砂の締固め

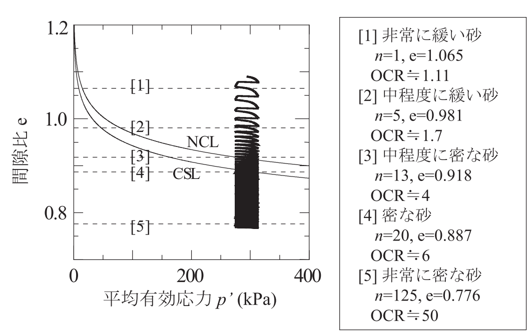


図3.15　締固め途上の過圧密比の蓄積

面のsizeは現応力の位置にとどまったままだから，かくして砂の場合は，過圧密比が急激に増大してゆくのである。

1.5で，砂を圧縮するのに板を置いて上から荷重をかける馬鹿などいないと述べたが，それを図3.16に示した。この図は，繰り返しせん断による締固め状態まで，単調圧縮（monotonic loading）だけで体積を減らすことは，いくら荷重があっても足りないことを示している。砂の場合，過圧密比の理解には「過去に負荷された最大荷重」という，粘土を念頭において昔から流布していた概念はまったく必要でない。「繰り返しせん断（repeated loading）」がこの概念に置き換わる。粘土でもそのとおり当てはまることは4.で述べる。

1960年代米国に，砂にもe–ln p'関係があることを示すために，まさに図3.16のように単調圧縮で砂の圧縮を試みた土質力学者がいた。しかし上に馬鹿と書いた手前，この話題にこれ以上触れることはできない。

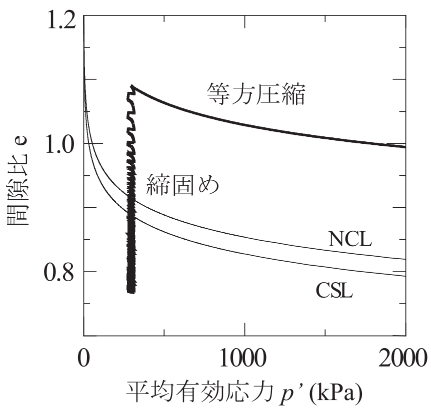


図3.16　砂の締固めと等方圧縮

モデル計算によって逆に我々が教わることの多いのは，現代土質力学のひとつの特徴である。「なぜか」という疑問にモデルが答えるのである。

4 自然堆積粘土地盤の二次圧密／長期遅れ沈下

自然堆積粘土地盤の圧密では，しばしば次の①〜③が観測される。

①　小荷重でなく，荷重がある大きさを超えたときは，大なり小なり，必ず二次圧密/長期遅れ沈下が観測される。

②　過剰間隙水圧は，圧密途上でしばしば消散でなく上昇し，通常の弾性/弾塑性圧密解析が示すように消散の一方ではない（弾塑性とはこの場合カムクレイモデルか，日本で発達したその亜流を指す）。

③　長期大沈下は，過剰間隙水圧がまだ残存している間から継続して起こり，過剰間隙水圧消散後に「二次」的に起こるのではない。

以上をもっとも直截的に理解するために，一次元圧密の話から始める（4.1）。軟弱地盤上の道路盛土の事例を用いた詳細は4.2で紹介する。そのあと二次圧密／長期遅れ沈下の予測と対策について述べる（4.3）

4.1.　二次圧密／長期遅れ沈下の一次元圧密理論からの推論

自然堆積の粘土が，初期にたとえかなり過圧密で，このため初期にM_S>Mの状態にあっても，粘土は過圧密の解消（正規圧密化）が骨格構造の劣化よりはるかに速いので（3章図3.13），負荷による塑性変形の進展によってM_Sが下がりMよりも小さくなって，やがて

$$M_S p' < q < Mp' \qquad (4.1)$$

の応力状態に達することがある（図4.1）。この状態では，3章図3.11のように塑性圧縮をともなう軟化が起こるが，この状態を一次元の鉛直有効応力σ'_Vと間隙比eの関係で図4.2に示した。軟化中はこの図のように間隙水圧は増加する（湧き出す）。この状態が継続している間は間隙水圧が消散しないのだから圧密が遅れる原因になる。

負荷が継続し塑性変形がなお進展すると，やがて構造の劣化も進展し始め，これに伴いM_Sは大きくなってMに近づいて行くから，式（4.1）の状態から

$$q < M_S p' < Mp' \qquad (4.2)$$

となって，この土は通常の硬化状態になり，通常の圧密に戻る。図4.3参照。

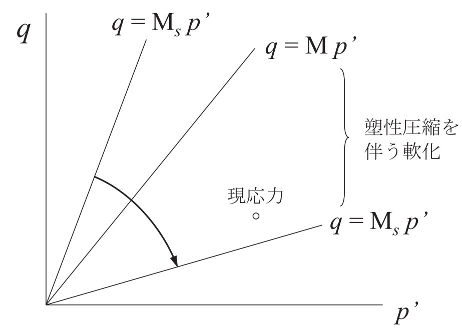


図4.1　過圧密の解消に伴うM_Sの減少

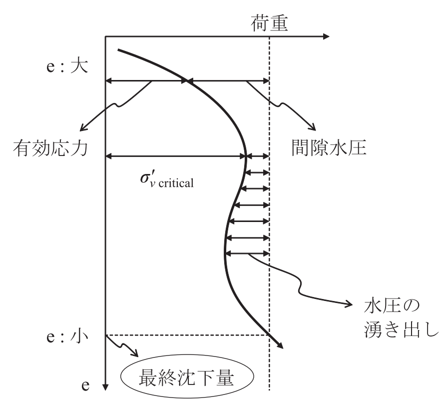


図4.2　σ'_V–eでの軟化と間隙水圧の上昇

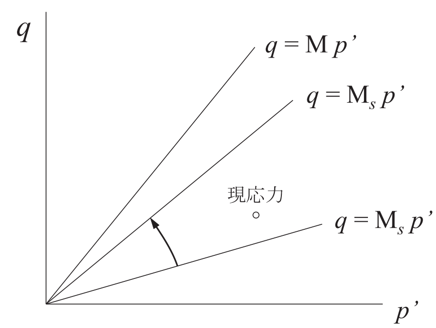


図4.3　構造の劣化によるM_Sの増加

Terzaghiの一次元圧密の式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{4.3}$$

で説明すると，圧密係数

$$c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w} \tag{4.4}$$

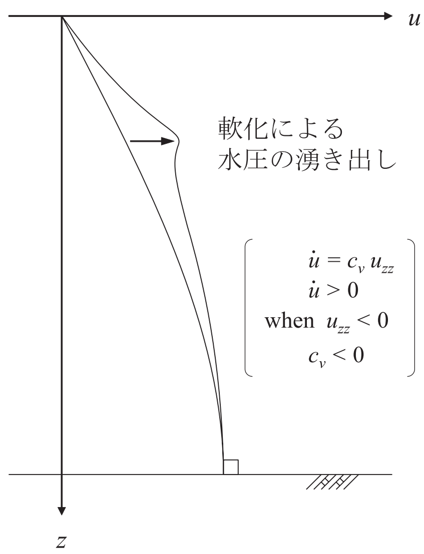


図4.4　軟化による過剰間隙水圧の湧き出し

は$1/m_V$，つまり「固さ」に比例する。だからその土が軟化しているときは固さが負でc_V<0となり，この間に間隙水圧が図4.2のように上昇（$\partial u/\partial t$>0）すれば（$\partial^2 u/\partial z^2$<0）となり，深さ方向の間隙水圧分布は左に凸となる。これを図4.4に示した。間隙水圧が湧き出す様子はこのようである。

以上はすべて概念的説明だが，実際の内容を，上負荷面・下負荷面が導入されたカムクレイモデルを用いた一次元圧密の計算によって，もう少し正確に見てみよう。

初期に表4.1の状態にあった均質な，しかし過圧密で構造の発達した，乱さない粘土の標準圧密試験機（上端排水，下端非排水）による圧縮試験である。

最初に定率の漸増載荷を2種類行う。結果を図4.5に示すが，速い荷重速度では鉛直荷重σ_V（掛けた荷重で有効応力でない）と見かけの間隙比（供試体上から下までの平均値）eの関係は右に大きく出て，遅い定率載荷ではその左側にきて二本はほぼ平行である。これは速い載荷ほど過剰間隙水圧が抜けきらず，だから同じ間隙比でも大きな荷重を支えることができる。いわゆる水～土骨格連成効果で，いわゆる粘塑性理論で言う「アイソタック（等速度線）」などとは全く関係がない。（なお図中のNCL直線は，計算モデルの土台にしたカムクレイの一次元圧縮の正規圧密線である。）

さて，図4.5中のA, B, Cの，小・中・大の3つの荷重レベルで荷重を増やすのをやめ，以後荷重一定で通常の圧密試験に入る。その結果を供試体の沈下～時間関係で示したものが図4.6である。図中太線で示している部分が，供試体のどこかの深さで軟化を伴う圧縮を示している部分である。低い荷重レベルAでは遅れ圧縮は起こっていない。

表4.1　試料の初期値

間隙比e_0	1.19
平均有効応力p_0'(kPa)	9.8
初期構造$1/R_0^*$	20.0
初期過圧密比$1/R_0$	100.0

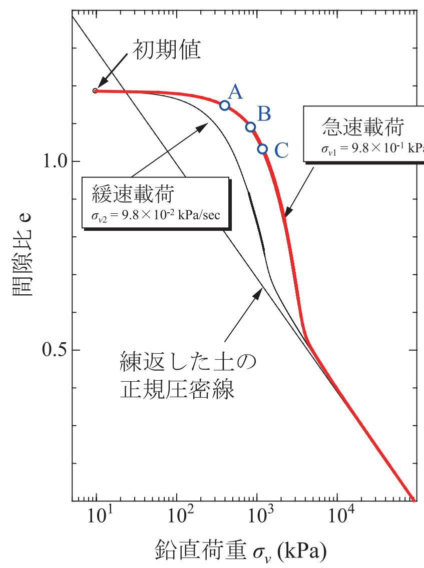


図4.5　定率漸増載荷時の見かけのe–lnσ_V

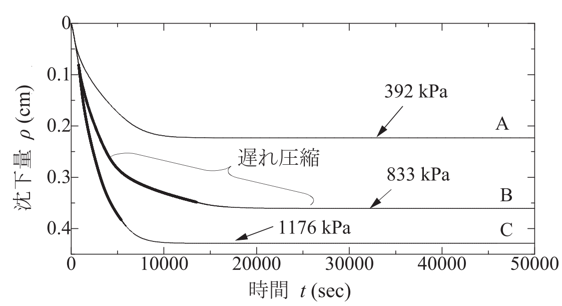


図4.6　体積圧縮を伴った軟化による遅れ沈下
（図中太線は供試体内で軟化が生じている）

荷重レベルBで遅れ圧縮が著しい。しかも極端に大荷重Cのときは遅れ沈下は認められない。荷重レベルBのときの供試体内部の深さ方向に沿う過剰間隙水圧の等時曲線を図4.7に示す。地盤（ここでは供試体）の排水端に近い上から順に軟化が始まり，図4.4のように間隙水圧の上昇が見られる。

この数値実験では，以下にも触れておく。荷重がBの少し前，785kPaのときの供試体の沈下挙動を図4.8に示す。このような圧密途上での沈下の加速化は，従来理論では説明できないものだが，実際にはよく見られる。沈下～時間の曲線は決して指数関数のようにスムースではない。

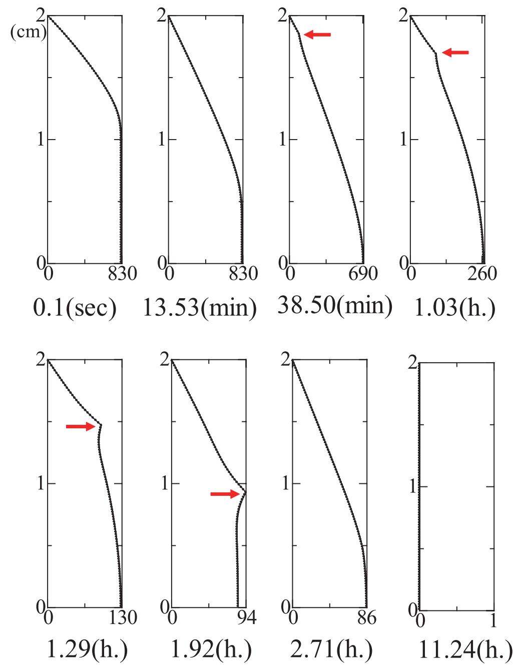


図4.7　過剰間隙水圧の等時曲線（kPa）

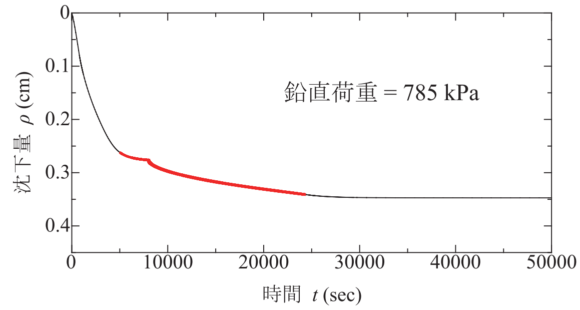


図4.8　突然に起こる大沈下

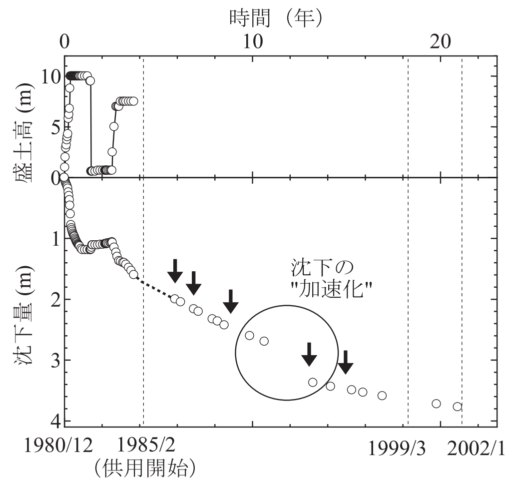


図4.9　神田地区の沈下～時間関係の計測

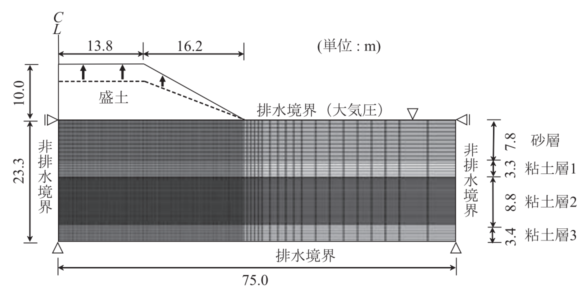


図4.10　有限要素メッシュおよび境界条件

4.2.　常磐自動車道神田地区における長期大沈下の多次元圧密解析の事例

当該盛土の沈下観測記録を先に図4.9に掲げる。地盤改良はなされていない無処理地盤であった。

図4.10は解析のための有限要素図であるが，この図の砂層，粘土層1～3の初期状態の推定結果は図4.11に示す。

厚さ9m弱の粘土層2は，長期大沈下の原因になった海成の軟弱粘土（常磐粘土）であり，この力学特性の記述が最大のポイントになる。様々の土質試験によってその初期状態が絞り込まれたが，構造の程度$1/R^*$を類推する資料は当時（1985年以前）乏しく，そのため構造の初期値を

地盤A：$1/R^*_0=72.0$

地盤B：$1/R^*_0=40.0$

の二通りに取って解析が進められた。

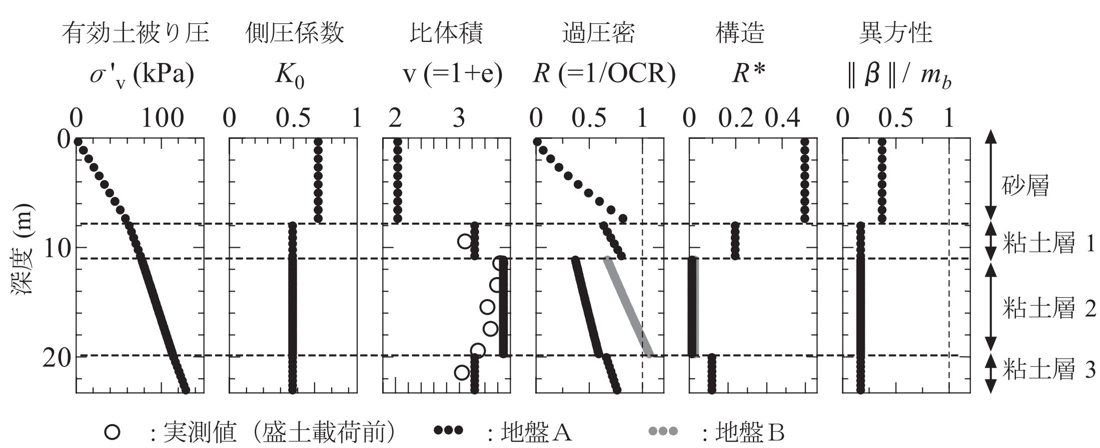


図4.11　解析で与えた深度方向の初期分布

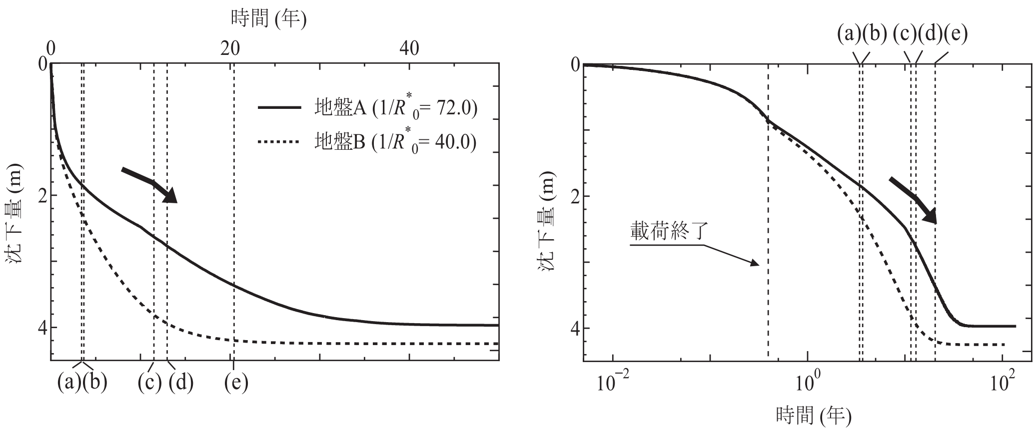
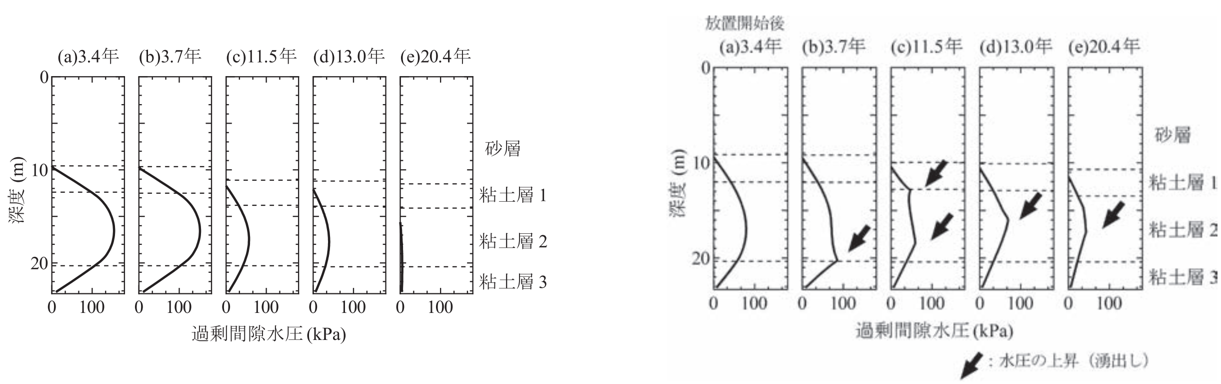


図4.12　盛土中央における沈下～時間関係（右図：log scale）



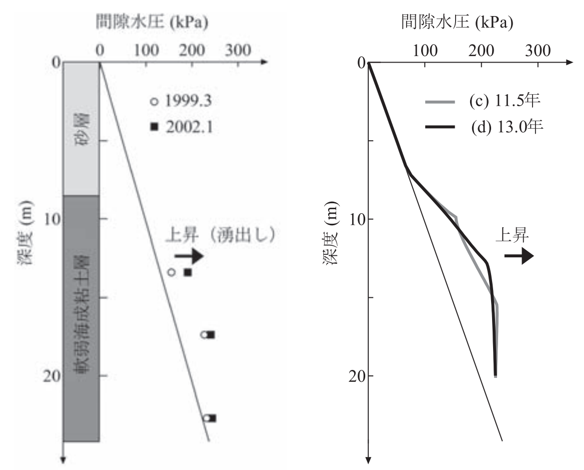
①地盤A（粘土層2：1/R^*_0=40.0）　②地盤B（粘土層2：1/R^*_0=72.0）

図4.13　過剰間隙水圧の等時曲線（盛土中央直下）

盛土の載荷は1.4kPa/dayのきわめて速い速度で行われ，10mの盛土高さまで144日しか掛けていない。このような急速載荷が可能になったのは，図4.10に見る通り上部の厚さ8mに及ぶ砂層の存在による。

解析結果を順にみてゆく。図4.12は盛土中央での沈下～時間関係である。盛土後20年までの沈下～時間を図4.9と比べると地盤Aが地盤Bよりも実測に近い。地盤Aで沈下の加速化も見て取れる。図4.12中の(a)，(b)～(e)の各時点での粘土層2中での深さ方向に沿う過剰間隙水圧の等時曲線を図4.13に示した。構造の劣化（1/*R**の減少）によって，粘土に圧縮軟化が起こり，明確に間隙水圧の湧き出しが見られる。このため地盤Aでは，地盤Bに比べて，遅れ沈下が著しくなるが，それは図4.12からも見て取れるとおりである。

間隙水圧の湧き出しは当該現場でも実測されていて，同時刻における解析の結果と比べたものが，図4.14である。



①実測値　②解析結果

図4.14　間隙水圧の上昇の観測

多次元局部載荷中の骨格構造の劣化（1/*R**の減少）をともなう粘土要素の挙動は非常に複雑である。しかし，砂の締固め挙動とまったく同じような挙動は粘土でも起こることを見ておくのは重要なので，以下のその概要を説明する。

図4.15は，地盤Aの粘土層2の中央深さ，盛土中央直下の粘土要素の，圧密途上の比体積vと平均有効応力p'の時間挙動を示したものである。図中の破線は，盛土幅が無限に広い場合，つまり要素に一次元圧縮しか生じない場合の要素挙動で，これは先に説明した図4.2に対応している。しかし多次元圧密の場合は，要素自身が上下と左右の要素に影響され，複雑な除荷・再負荷，要素自身の軟化等を起こし，間隙水の移動も上下左右に及ぶため，要素挙動はきわめて複雑になる。まず①から③では，周辺の粘土要素の水圧の湧き出しの影響を受け除荷と再載荷が交互に起こり，つまりこの要素は繰り返し負荷

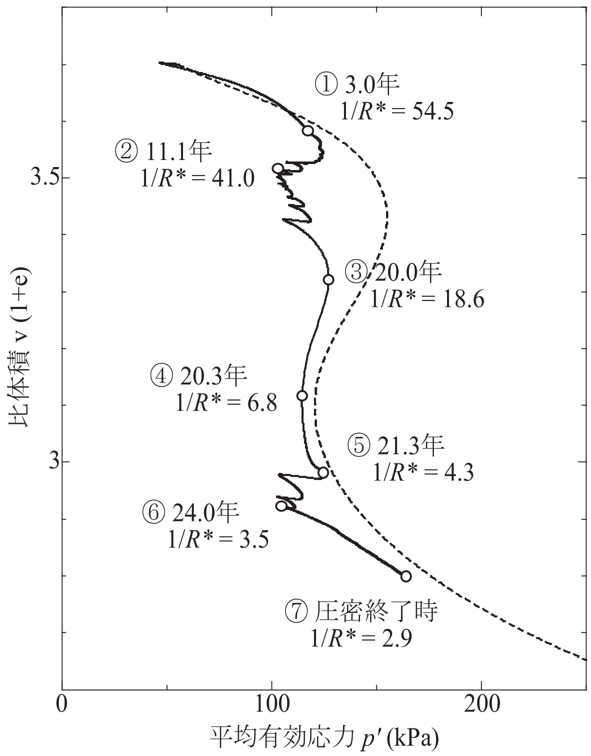


図4.15　粘土層2中のv(=1+e)–p′関係

を受けている。この結果17年という非常に長い時間を要するが粘土の構造の低位化が進み(1/R^*=54.5から1/R^*=18.6まで)大圧縮，比体積vの減少，を示す。その後③から④では，わずか0.3年という時間で顕著な構造破壊(1/R^*=18.6から1/R^*=6.8まで)が生じる。そしてこのとき

$$\mathrm{M}_s p' < q < \mathrm{M}p' \tag{4.5}$$

の応力状態に入り，この要素自身が塑性圧縮を伴う軟化を顕著に示す。そのため平均有効応力p'が減少し水圧の上昇が生じる。しかしこの状態は長く続かず，④からは

$$q < \mathrm{M}_s p' < \mathrm{M}p' \tag{4.6}$$

の応力状態に入り，塑性圧縮をともなう硬化に転じる。⑤から⑥では，再び周辺要素の軟化の影響を受けて繰り返し負荷を受け，⑥点に至ってようやくこの要素は乱れが収まる。最後の⑥から⑦の約16年間は，ほとんど一次元圧縮状態に近い圧密変形を示し，土骨格の変形が終了する。①から③，および⑤から⑥のような構造劣化に伴う粘土の大圧縮は，非常に長い年月を要するが，「粘土の締固め」と呼んでもよい挙動である。3.5節「砂の締固め」の図3.15と比較して，時間を除き上掲の図3.15と何も変わらない。

砂に締固めがあって，粘土には圧密しかないなどというのは，今でもなおそれを信じる大学の土質力学教師は多いかもしれない。しかしそれは，古い間違った土質力学の謂いであって，「粘土の締固め」こそは自然堆積の粘土地盤が長期遅れ大沈下を引き起こす主原因であり，見落とすことのできない重要事項であったことがわかる。

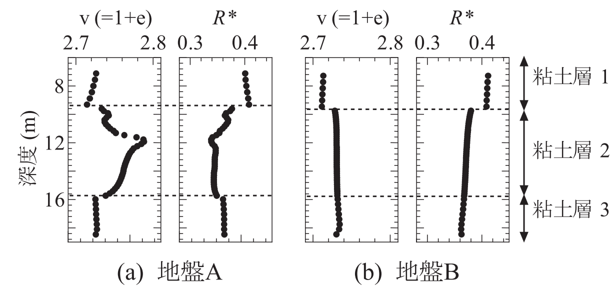


図4.16　最終分布(盛土中央直下，粘土層のみ)

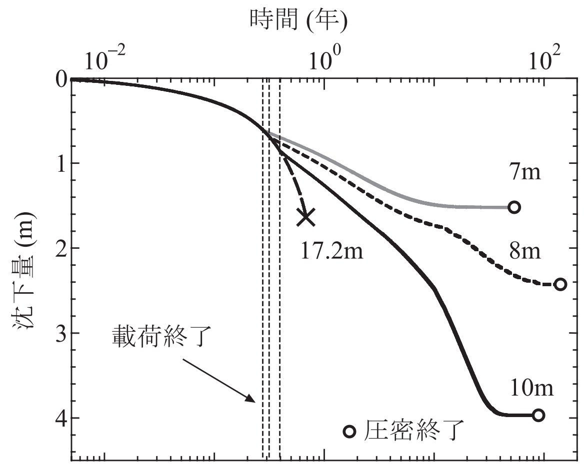


図4.17　盛土荷重の影響

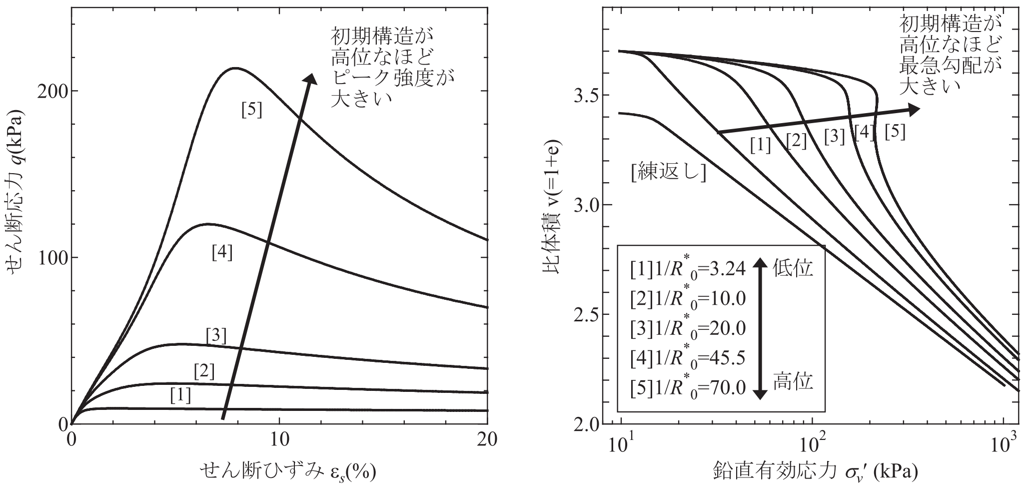
なお，地盤Bでは以上のような挙動はまったく見られず，間隙水圧は消散する一方で，いずれの要素も湧き出しは起こっていなかった。地盤AとBの最終状態を図4.16に示す。

最後に，盛土荷重の大きさが沈下～時間挙動に及ぼす影響を図4.17に示す。沈下の加速化を含め荷重の大きさは重要である。荷重には閾値があり，それを超えると遅れ大沈下を生じるのは4.1で説明したとおりであるが，その閾値を超えてしまった盛土高8mの場合を考える。盛土高さ10mにくらべ沈下量は少ないのに，沈下は100年以上にわたって継続する。一方荷重の閾値を下回った盛土高7mの場合は通常の弾塑性圧密に終始し，遅れ沈下も，沈下の加速化も何も起こらない。

荷重の閾値に影響するのはもちろん地盤の，この場合特に粘土地盤2の初期条件，すなわち初期の過圧密比(1/R_0)と初期構造の大きさ(1/R_0^*)およびそれらの発展則パラメータである。荷重の閾値は，これらについて想定される多くのケースについての一連の予測解析が必要になる。関連する事項について，次節で現状を紹介する。

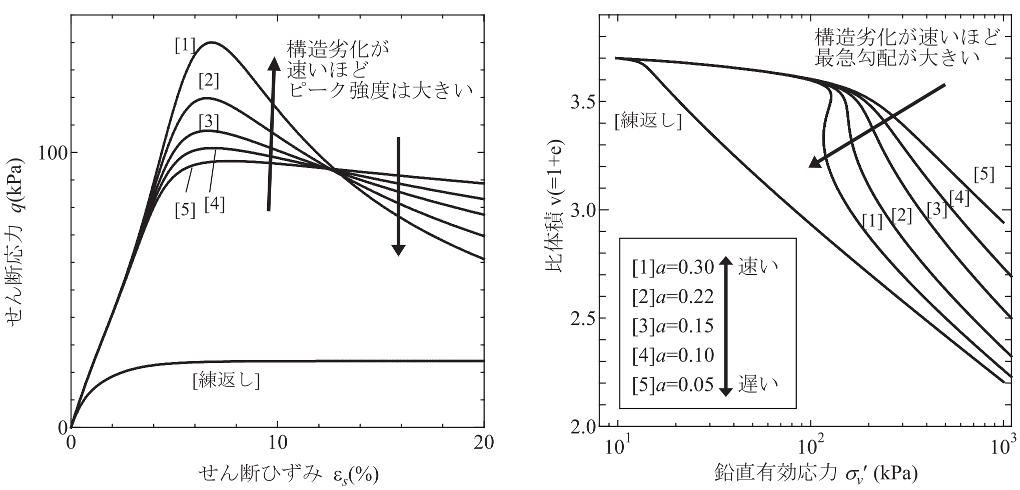
4.3.　鋭敏比とe–lnp′の最急勾配

図3.10で説明したように，自然堆積の乱さない粘土では，正規圧密状態においても，非排水せん断試験は必ず軸差応力にピークが現れ，その後軟化して残留状態に至る。2.2で述べた，構造をすっかり喪失している練返しの



(a) 鋭敏比（非排水せん断挙動）　(b) 圧縮指数比（一次元圧縮挙動）

図4.18　初期構造の程度の影響（構造劣化指数a＝0.22一律）



(a) 鋭敏比（非排水せん断挙動）　(b) 圧縮指数比（一次元圧縮挙動）

図4.19　構造劣化速度の影響（初期構造の程度1/R^*_0＝45.5一律）

正規圧密粘土の非排水せん断挙動とは大いに異なる。ふたつの強度の違いは，鋭敏比と呼ばれている。

同じように自然堆積の乱さない粘土では，圧密圧縮試験において，e−ln p'が練返し粘土のように直線に乗ることなど絶対にない。e−ln p'関係は練返し粘土の右側，練返し粘土にとっては不可能領域に現れ，必ず曲線状を示す。骨格構造の存在，つまり練返し粘土より常に嵩張っていることを示していて，これは3.1で述べたとおりである。

以上のような自然堆積の乱さない粘土の圧縮／せん断挙動は，上負荷面・下負荷面が導入されたカムクレイモデルによって自在に再現が可能である。それを図4.18〜図4.19に示す。

これらの図から，以下のことがわかる。

上・下負荷面が導入されたカムクレイモデルの（発展則中に含まれる）パラメータの決定のためには，土台になるカムクレイモデルのパラメータ決定のための完全練返し粘土の圧密圧縮試験，せん断試験のほかに，もう一つ，現場で採取された乱さない粘土の圧密圧縮試験，せん断試験の二組の試験が必要である。とくに後者は，土の過圧密比，構造の状態の初期値R_0，R^*_0の決定のためにも，欠くことはできない。乱さない粘土の実験がなぜ必要か，あるいは乱した粘土と乱さない粘土の比較がなぜ必要か，これを理論上初めて明らかにしたのが上・下負荷面カムクレイモデルと言って全く間違っていない。カムクレイモデルやその亜流モデルには，練返し粘土と乱さない粘土に差があることを，モデル自身は全く説明できないからである。

さて，長期遅れ大沈下が起こる可能性は，鋭敏比に加え，図4.20に示す「圧縮指数比」と組み合わせて予測することが可能である。

鋭敏比がその粘土の初期構造の発達の程度を表すのに対して，図4.20の圧縮指数比は単位の塑性変形の進展に対する構造劣化の速度の大きさを表している。

北海道岩見沢，江別からはじまり，東北の大沢郷，本州伊勢，長島そして，九州武雄に至るまで全国11か所の軟

弱地盤上の高速道路盛土における，100を超える現場を渉猟して，

鋭敏比8以上，圧縮指数比1.5以上

の地盤では，「圧密降伏荷重（e–ln p' 曲線の最大曲率点）」を跨ぐ大荷重をかけるときほとんど必ず長期遅れ大沈下が起こっていることが，見出されている。図4.21は，名古屋大学地盤工学研究室の田代むつみ氏と，

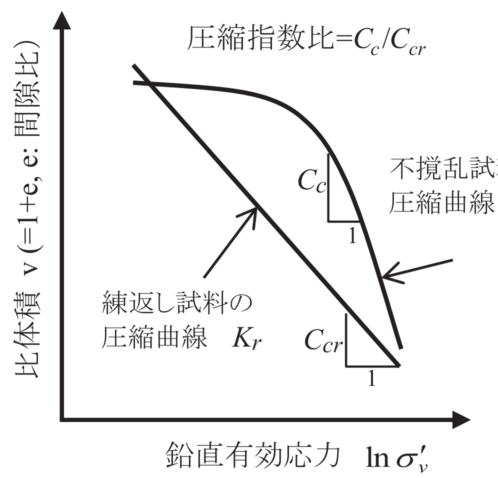


図4.20　圧縮指数比

上・下負荷面カムクレイモデルに通暁したJH（旧道路公団）の現場実務技術者稲垣太浩氏の共同研究によって発見されたことを付記する。

5 おわりに

不幸なことだが，日本ではカムクレイモデルが日本に伝えられる時（1970年代初頭）と合わせて，あるいはほんの少し前に，東欧のPerzynaやSukljeらによる「粘塑性」理論も伝わってきた。両理論は水と油のようなものであるので，土質力学の名のもとにそれらを並立させ，「両方を立てる」ことなど，世界のだれも求めていなかったと思う。しかしそれに走ったアカデミズムが，著者は思うのだが，世界で日本にだけ存在した。

精密な室内試験で観測される粘土の「非排水せん断試験」における「速度依存性」の多様な現れ方は，土の正しい弾塑性構成式を用いて，三軸試験を水～土骨格連成の境界値問題として解けば，この多様性も含め，すぐにでも正確に続々と計算されてくる。たとえ練り返し粘土に限っても，対象を過圧密粘土にまで広げれば，この多様性が尋常でないことはすぐにでも理解できる。しかしこれを，カムクレイモデルと粘塑性理論の混じった，構成式レベルでの理解で説明しようとして，日本では1980年代の大部分が消費されてしまった。1990年代に入ってもまだ続けられていたが，しかし多様な現象はその多くを説明しきれないまま，排水ないし部分排水条件下での速度依存に至っては，尚更まったくその方向の研究努力も，また成果も確認できないまま，いつしか終わってしまった。

この間（1970年代初頭～1990年代初頭）は同時に，

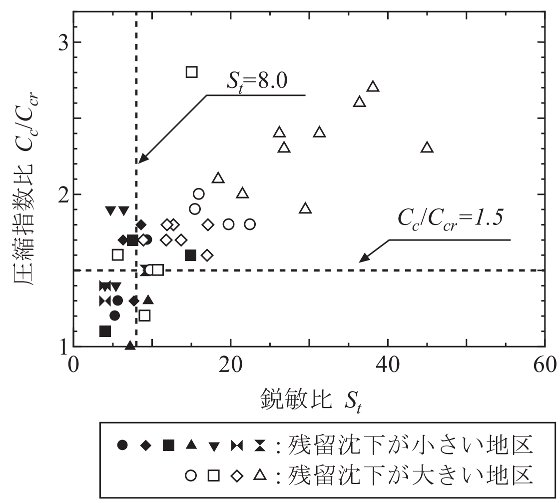


図4.21　鋭敏比8以上，圧縮指数比1.5が閾線

乱した粘土と乱さない粘土の差に，力学的な考察を傾注しなかった時代でもある。それが災いして，鋭敏比も，圧縮指数比も，未だその測定の学会基準さえないことは，読者は是非知っておいてほしい。

砂の日本における研究にはもう触れないが，非排水が中心で，砂の排水せん断など話題に上ることなどごく稀であったことだけは述べておく。「速度効果」も「鋭敏比」も「砂」も，以上はすべて同時代のもので，日本の土質力学の偏った発展の歴史を象徴している。

土質力学は土木の現場の要求に即して発展する。未知の現象や挑まれるべき課題は，現場がいつも教えている。限られた紙幅で説明不足が残念だが，4.3にまでたどり着けたのは幸いである。

地震と地盤災害に関する事柄，地質学に関する事柄など，土木で土質力学は一番自然科学に近い学問分野である。しかもそれを駆使できる計算力学も土質力学とともに発展していて，その成果は目をみはるばかりと言ってよい。それらの紹介は，他日しかし近い将来，適切な研究者によってなされることを心から願っている。

謝辞　この報文の構成には，名古屋大学中野正樹教授と野田利弘教授から，日常の討議を含め，多くの示唆を頂いた。報文の編集と作図作表は，名古屋大学豊田智大助教によるものであるが，それ以上に，豊田助教には，原稿全般にわたって誤りのすべてを正していただいた。また名古屋工業大学張鋒教授からも激励を受けた。責任はすべて著者にあるが，以上の諸氏には心から謝意を表する。

参考資料

1)Akira Asaoka: Consolidation of clay and compaction of sand, Keynote Lecture, *12th Asian Regional Conference on SMGE*, Singapore, 2003.

2)中野正樹：土質力学，コロナ社，2012.